7.4.5 Rovnice roviny II

Předpoklady: 7405

Př. 1: Najdi obecnou rovnici roviny s parametrickým vyjádřením:
$\rho:\{[2+t-s;3-2t+s;-1-t+2s],t,s\in R\}$.

Pro obecnou rovnici potřebujeme normálový vektor roviny, který zjistíme pomocí vektorového součinu.

$\boldsymbol{u}=(1;-2;-1)1;-2$

$\boldsymbol{v}=(-1;1;2)-1;1$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(-4+1;1-2;1-2)=(-3;-1;-1) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;1;1)$

Rovnice: $3x+y+z+d=0$.

Dosadíme bod $A[2;3;-1]$: $3\cdot 2+3+(-1)+d=0 \Rightarrow d=-8$.

Rovina ρ má obecnou rovnici $3x+y+z-8=0$.

Př. 2: Najdi obecnou rovnici roviny σ, která prochází počátkem soustavy souřadnic a je rovnoběžná s rovinou $\rho: 2x-y+3z-4=0$.

Rovina σ je rovnoběžná s rovinou ρ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{n}_\sigma$ je násobek vektoru $\boldsymbol{n}_\rho$.

$\boldsymbol{n}_\sigma=\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;3)$

Rovina σ: $2x-y+3z+d=0$.

Dosadíme počátek, bod $O[0;0;0]$: $2\cdot 0-0+3\cdot 0+d=0 \Rightarrow d=0$.

Rovina σ má obecnou rovnici $\sigma: 2x-y+3z=0$.

Př. 3: Najdi podmínku, kterou musí splňovat obecná rovnice roviny, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

Z předchozího příkladu se zdá, že roviny procházející počátkem soustavy souřadnic mají koeficient *d* v obecné rovnici nulový.

Přesvědčíme se obecně: rovina $ax+by+cz+d=0$.

Dosadíme bod $O[0;0;0]$ a spočítáme koeficient *d*: $a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \Rightarrow d=0$

Roviny procházející počátkem soustavy souřadnic mají koeficient *d* v obecné rovnici nulový.

Př. 4: Roviny ρ má tyto vlastnosti: je rovnoběžná s osou *z*, je rovnoběžná s přímkou $p:\{[2+2t;1-t;3],t\in R\}$ a prochází bodem $A[2;2;5]$. Urči obecnou rovnici roviny ρ.

Rovina je rovnoběžná s přímkou $\Rightarrow$ směr přímky je jedním ze směrů roviny $\Rightarrow$ směrové vektory přímek ze zadání jsou směrovými vektory roviny.

Normálový vektor roviny zjistíme pomocí vektorového součinu.

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}_p=(2;-1;0)2;-1$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}_z = (0;0;1)0;0$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-1-0;0-2;0-0) = (-1;-2;0) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1;2;0)$

Rovnice: $x + 2y + d = 0$.

Dosadíme bod $A[2;2;5]$: $2 + 2 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = -6$.

Rovina ρ má obecnou rovnici $x + 2y - 6 = 0$.

Př. 5: Urči průsečíky roviny $\rho: x + 2y - 6 = 0$ z předchozího příkladu se souřadnými osami. Nakresli do obrázku její polohu.

Průsečík roviny s přímkou $\Rightarrow$ musí vyhovovat rovnici přímky i rovnici roviny.

Průsečík s osou *x*:

Rovnice osy *x*: $\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 0, t \in R \end{aligned}$

Dosadíme do rovnice roviny ρ: $x + 2y - 6 = 0$.

$t + 2 \cdot 0 - 6 = 0$

$t = 6$

Souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow P[6;0;0]$.

Průsečík s osou *y*:

Rovnice osy *y*: $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= t \\ z &= 0, t \in R \end{aligned}$

Dosadíme do rovnice roviny ρ:

$x + 2y - 6 = 0$

$0 + 2 \cdot t - 6 = 0$

$t = 3$

Souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 3 \\ z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow Q[0;3;0]$.

Průsečík s osou *z*:

Rovnice osy *x*: $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= t, t \in R \end{aligned}$

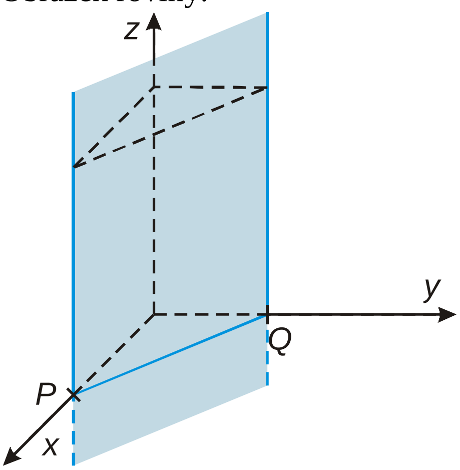
Dosadíme do rovnice roviny ρ:

$x + 2y - 6 = 0$

$0 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$

$-6 = 0 \Rightarrow$ průsečík neexistuje. Je to jasné, rovina je rovnoběžná s osou *z* $\Rightarrow$ nemůže se s ní protnout.

Obrázek roviny:



Jak určit průsečíky s osami jednodušeji?
Obecná rovnice roviny v prostoru je analogií obecné rovnice přímky v rovině $\Rightarrow$ zkusíme ji převést od úsekového tvaru:

$x+2y-6=0$

$x+2y=6 \quad /:6$

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ - stejně jako u přímky v rovině máme ve jmenovatelích zlomků souřadnice průsečíků.

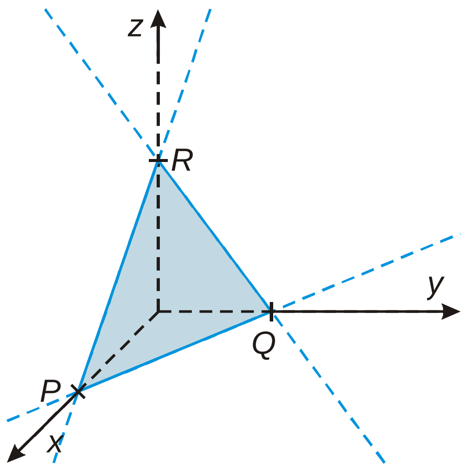
Obecnou rovnici roviny určené body $P[p;0;0]$, $Q[0;q;0]$ a $R[0;0;r]$, kde platí $pqr \neq 0$, je možné napsat v úsekovém tvaru $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$.

Př. 6: Rovina σ se protíná se souřadnými rovinami v bodech $P[6;0;0]$, $Q[0;3;0]$, $R[0;0;4]$. Napiš její obecnou rovnici v úsekovém i normálním tvaru. Nakresli její obrázek.

$P[6;0;0]$, $Q[0;3;0]$, $R[0;0;4]$ $\Rightarrow$ úsekový tvar rovnice $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Normální tvar: $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \quad /\cdot 12$

$2x+4y+3z=12$.



Př. 7: Rovina τ se protíná se souřadnými osami v bodech $Q[0;-2;0]$, $R[0;0;3]$. Napiš její obecnou rovnici v úsekovém i normálním tvaru. Nakresli její obrázek.

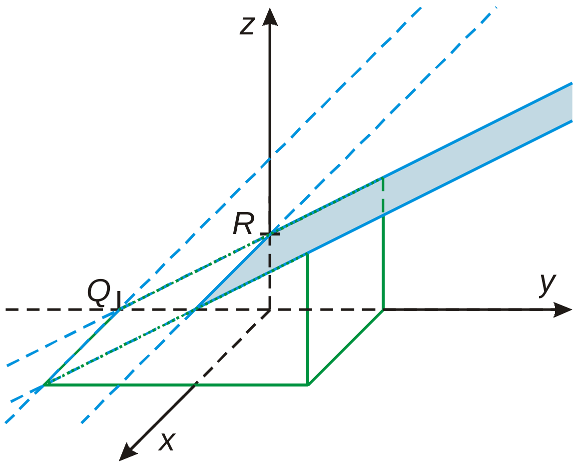
Rovina τ nemá průsečík s osou x $\Rightarrow$ je s ní rovnoběžná.
Jak se to projeví v obecné rovnici?
V příkladu 3 jsme měli rovinu rovnoběžnou s osou z, v obecné rovnici roviny byl koeficient c nulový (zmizelo z) $\Rightarrow$ v rovnici roviny τ bude nulový koeficient a.
Jak to ověříme?
Normálový vektor roviny τ: $\boldsymbol{n}_\tau=(a;b;c)$ je kolmý na osu x: $\boldsymbol{s}_x=(1;0;0)$ $\Rightarrow$ skalární součin je nulový: $\boldsymbol{n}_\tau \cdot \boldsymbol{s}_x=(a;b;c)(1;0;0)=a+b\cdot 0+c\cdot 0=0 \Rightarrow a=0$.

Sestavíme rovnici v úsekovém tvaru:

$Q[0;-2;0]$, $R[0;0;3]$ $\Rightarrow$ $\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1 \quad / \cdot 6$

$-3y+2z=6$

$-3y+2z-6=0$



Dodatek: Fakt, že rovina rovnoběžná s osou *x* má koeficient *a* nulový, můžeme zdůvodnit i jinak.
Dosazením do rovnice roviny $\tau: -3y+2z-6=0$ můžeme ověřit, že bod $B[3;2;6]$ leží v rovině τ. ($0\cdot3-3\cdot2+2\cdot6-6=0$).
Když se z bodu $B[3;2;6]$ posuneme do bodu $C[4;2;6]$, posunuli jsme se ve směru osy *x* (o vektor $\boldsymbol{u}=(1;0;0)$), pokud je rovina s tímto vektorem rovnoběžná musí v ní bod *C* také ležet. Podobně se mohu posunout do libovolného bodu o souřadnicích $X[x;2;6]$ $\Rightarrow$ na *x*-ové souřadnici bodu nezáleží $\Rightarrow$ obecná rovnice *x*-ovou souřadnici neobsahuje.

Př. 8: Petáková:
strana 116/cvičení 21
strana 116/cvičení 26
strana 116/cvičení 29
strana 116/cvičení 31 a) d) g)

Shrnutí: Obecnou rovnici roviny můžeme upravit do úsekového tvaru, ze kterého můžeme zjistit průsečíky se souřadnými osami.